Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра исследования операций

Отчет по преддипломной практике

«Оптимизация крупных закупок в модели Бертсимаса-Ло с учетом дополнительной информации»

Студентка 411 группы
А. И. Макарова

Научный руководитель
к.ф.-м.н., доцент В. В. Морозов

Москва, 2014

Содержание

1 Введение

В работе рассматривается рынок, движимый заявками, который представляется в виде книги лимитированных заявок– множество заявок на покупку и продажу, доступных в данный момент. Каждая заявка в книге содержит информацию о своей цене и соответствующем объеме. При сделке объема V происходит исполнение лучших(по цене) заявок суммарным объемом V, т.е данные заявки изымаются из книги. В любой момент игроки могут выставлять и снимать свои заявки по усмотрению.

Изучается динамика стратегии, которая обеспечивает минимизацию величины дисперсии затрат рынка, при условии ограниченных средних затрат. Крупная закупка на рынке некоторого актива приводит к увеличению его цены исполнения, поскольку из книги изымаются заявки с низкими ценами и число таких заявок ограничено. Для оптимизации таких покупок следует учитывать динамику изменения цены.

Модель Бертсимаса-Ло [1] предполагает наличие одного инвестора, который может совершать покупки достаточно большого размера, для которых необходимо учитывать влияние на цену. Так же отметим, что это дискретная модель с равномерным разбиением по времени и она не учитывает временное влияние на цену. Постоянное влияние в этой модели зависит от объема сделки.

2 Постановка задачи

В рассматриваемой модели инвестор стремится приобрести актив в большом количестве в течении фиксированного отрезка времени $[0, T]$. Как было сказано выше, отрезок разбивается на равные части $\Delta t = \frac{T}{N}$:

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T.$$

A — объем совершаемой покупки.
Покупки совершаются в моменты времени t_i, $i = 0, \ldots, N$.
$x = (x_0, x_1, \ldots, x_N)$ — стратегия инвестора.
$x_i \geqslant 0$ — объем покупки в момент времени t_i.
$\sum\limits_{i=0}^{N} x_i = A$
P_i — стоимость актива в момент времени t_i.
P_{-1} — стоимость актива, сложившаяся на рынке до начала торгов Динамика цен подчиняется закону геометрического броуновского движения:
$P_i = P_{i-1} + \alpha x_i + u_i,\ i = 1, \ldots, N$
u_i — независимые одинаково распределенные случайные величины.
$\mathbb{E} u_i = 0$, $Var\ u_i = \sigma^2 \Delta t$;
$\alpha > 0$ — коэффициент влияния покупки на цену
$P_0 = P_{-1} + \alpha x_0$, отсюда
$P_i = P_{-1} + \alpha \sum\limits_{j=0}^{i} x_j + \sum\limits_{j=1}^{i} u_j.$

$\mathbb{E}P_i = P_{-1} + \alpha \sum\limits_{j=0}^{i} x_j,$

$VarP_i = i\sigma^2 \Delta t.$

$\mathbb{E}\left[\sum\limits_{i=0}^{N} P_i x_i\right]$ — средние затраты.

$\mathbb{E}\left[\sum\limits_{i=0}^{N} P_i x_i\right] = \sum\limits_{i=0}^{N} x_i \left(P_{-1} + \alpha \sum\limits_{j=0}^{i} x_j\right) = \sum\limits_{i=0}^{N} x_i P_{-1} + \alpha \sum\limits_{i=0}^{N} \left(\sum\limits_{j=0}^{i} x_j\right) x_i = AP_{-1} + \alpha \sum\limits_{i=0}^{N} \left(\sum\limits_{j=0}^{i} x_j\right) x_i$

$\mathbb{E}\left[\sum\limits_{i=0}^{N} P_i x_i\right] \to \min \Longleftrightarrow \sum\limits_{i=0}^{N} \left(\sum\limits_{j=0}^{i} x_j\right) x_i \to \min$

3 Минимизация средних затрат

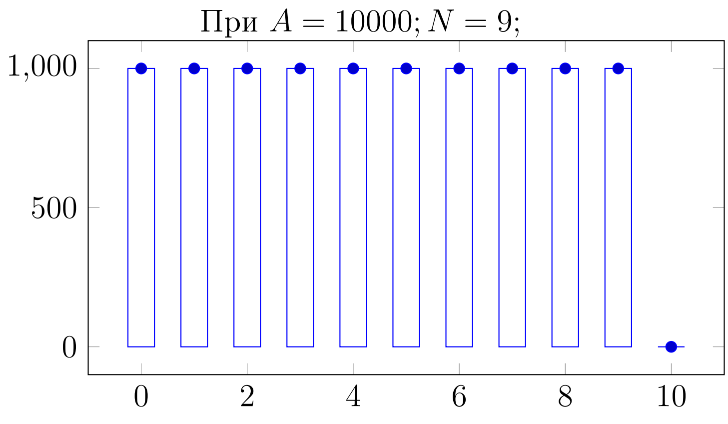
Рассмотрим задачу *минимизации средних затрат* в данной модели:

$$\begin{cases} f(x) = \sum\limits_{i=0}^{N} \left(\sum\limits_{j=0}^{i} x_j\right) x_i \to \min, \\ \sum\limits_{i=0}^{N} x_i = A, \ x_i \geqslant 0. \end{cases}$$

Известно, что оптимальной стратегией является:

$$x_0 = x_1 = \dots x_N = \frac{A}{N+1}.$$

Т.е. Затраты минимальны при равномерных закупках.



4 Минимизация дисперсии затрат с ограничением на максимальное значение средних затрат

Введем новые обозначения:

$\sum\limits_{i=j}^{N} x_j = X_j$ — сколько осталось купить в момент времени j,
$X_0 = A$,
В новых обозначениях:
$c(x) = \mathbb{E}\left[\sum\limits_{i=0}^{N} P_i x_i\right] = \sum\limits_{i=0}^{N} x_i \left(P_{-1} + \alpha \sum\limits_{j=0}^{i} x_j\right) = AP_{-1} + \alpha \sum\limits_{i=0}^{N} X_i(X_i - X_{i+1})$.
$Var\left[\sum\limits_{i=0}^{N} P_i x_i\right] = \sigma^2 \Delta t \sum\limits_{i=1}^{N} X_i^2$.
$Var\left[\sum\limits_{i=0}^{N} P_i x_i\right] \to \min \Longleftrightarrow \sum\limits_{i=1}^{N} X_i^2 \to \min$.

Сформулируем задачу:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{N} X_i^2 \to \min, \\ \mathbb{E}\left[\sum\limits_{i=0}^{N} P_i x_i\right] = AP_{-1} + \alpha \sum\limits_{i=0}^{N} X_i(X_i - X_{i+1}) \leqslant C_0, \\ A = X_0 \geqslant X_1 \geqslant \ldots \geqslant X_N \geqslant X_{N+1} = 0. \end{cases}$$

4.1 Решение задачи

Целевая функция является квадратичной, как и ограничение. Для решения используется метод множетелей Лагранжа.

Выпишем функцию Лагранжа

$$L(\widetilde{X}, \lambda_0, \lambda_1) = \lambda_0 \sum_{i=1}^{N} X_i^2 + \lambda_1 \left(AP_{-1} + \alpha \sum_{i=0}^{N} X_i(X_i - X_{i+1}) - C_0\right).$$

$\widetilde{X} = (X_0, X_1, \ldots, X_N)$
$\lambda_0,\ \lambda_1 \geqslant 0$ и одновременно не равны нулю.

В общем случае задача нерегулярная, поэтому рассмотрим два случая:
Первый — $\lambda_0 = 0$, тогда $\lambda_1 > 0$, второй — $\lambda_0 \neq 0$.

Рассмотрим первый случай:
Необходимое условие минимума:

$$L'_{\widetilde{X}} = \alpha\lambda_1(-X_{i-1} + 2X_i - X_{i+1}) = 0,\ i = 1, \ldots, N.$$

Из условия дополняющей нежесткости:

$$AP_{-1} + \alpha \sum_{i=0}^{N} X_i(X_i - X_{i+1}) - C_0 = 0,$$

и должно выполняться:

$$X_i - X_{i+1} \geqslant 0, \ i = 1, \dots, N.$$

Решаем разностное уравнение

$$\begin{cases} -X_{i-1} + 2X_i - X_{i+1} = 0, \\ X_0 = A, \\ X_{N+1} = 0. \end{cases}$$

Ищем решение в виде:
$X_t = \xi^t$.
Характериситическое уравнение:

$$\xi^2 - 2\xi + 1 = 0$$

$$(\xi - 1)^2 = 0$$

$\xi = 1$ — корень кратности 2.

$$X_t = \xi^t (C_1 + C_2 t).$$

$X_0 = C_1 = A$,
$X_{N+1} = (C_1 + C_2(N+1)) = 0$,
$A + C_2(N+1) = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{A}{N+1}$.
Таким образом, решение для X_t имеет вид:

$$X_t = A - \frac{A}{N+1} t.$$

Проверим условие $X_i - X_{i+1} \geqslant 0$:

$$X_i - X_{i+1} = A - \frac{A}{N+1} i - A + \frac{A}{N+1}(i+1) = \frac{A}{N+1} \geqslant 0.$$

Рассмотрим второй случай, когда $\lambda_0 \neq 0$:
Тогда: $\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \geqslant 0$.

Построим функцию Лагранжа:

$$L(\widetilde{X}, \lambda) = \sum_{i=1}^{N} X_i^2 + \lambda(AP_{-1} + \alpha \sum_{i=0}^{N} X_i(X_i - X_{i+1})).$$

Необходимое условие минимума в этом случае:

$$L'_{\widetilde{X}} = 0:$$

$$\begin{cases} 2X_1 + \lambda\alpha(-X_0 + 2X_1 - X_2) = 0, \\ 2X_2 + \lambda\alpha(-X_1 + 2X_2 - X_3) = 0, \\ \dots \\ 2X_N + \lambda\alpha(-X_{N-1} + 2X_N - X_{N+1}) = 0. \end{cases}$$

Решаем разностное уравнение:

$$\begin{cases} 2(1 + \lambda\alpha)X_i = \lambda\alpha(X_{i-1} + X_{i+1}),\ i = 1, \dots, N, \\ X_0 = A, \\ X_{N+1} = 0. \end{cases}$$

Здесь возможны 2 случая: $\lambda = 0$ и $\lambda \neq 0$.
Рассмотрим сначала случай с $\lambda = 0$. Тогда разностное уравнение примет вид:

$$\begin{cases} 2X_i = 0, \\ X_0 = A, \\ X_{N+1} = 0. \end{cases}$$

Откуда, очевидно, получается, что при $\lambda = 0$ оптимальное решение имеет вид

$$X_0 = A, X_i = 0, i = 1, \dots, N + 1.$$

Рассмотрим теперь второй случай с положительной λ. Так как $\lambda > 0$, $\alpha > 0$, то можно сделать замену:

$$\omega = \frac{1}{\lambda\alpha} + 1, \omega > 1.$$

Тогда уравнения преобразуются к виду:

$$2\omega X_i = X_{i-1} + X_{i+1}.$$

Будем, как и в предыдущем случае, искать решение в виде $X_t = \xi^t$:
Характеристическое уравнеие:

$$\xi^2 - 2\omega\xi + 1 = 0,$$

$$\xi_{1,2} = \omega \pm \sqrt{\omega^2 - 1}.$$

$$\xi_1 \xi_2 = 1,\ \xi_1 > 1, 0 < \xi_2 < 1.$$

Решение имеет вид:

$$X_t = C_1 \xi_1^t + C_2 \xi_2^t = C_1 \xi_2^{-t} + C_2 \xi_2^t.$$

Из начальный условий найдем C_1 и C_2:

$$X_0 = C_1 + C_2 = A,$$

$$X_{N+1} = C_1 \xi_2^{-(N+1)} + C_2 \xi_2^{N+1} = 0.$$

Таким образом, решение имеет вид:

$$X_t = A \left(\frac{-\xi_2^{2(N+1)} \xi_2^{-t} + \xi_2^t}{1 - \xi_2^{2(N+1)}} \right).$$

Легко проверяется, что $X_i - X_{i+1} \geqslant 0$.

Соберем воедино полученные результаты:

$$X_t = \begin{cases} \dfrac{A}{N+1}, & \lambda_0 = 0,\ \lambda_1 > 0; \\ X_t = A \left(\dfrac{-\xi_2^{2(N+1)} \xi_2^{-t} + \xi_2^t}{1 - \xi_2^{2(N+1)}} \right), & \lambda_0 = 1,\ \lambda \neq 0; \\ X_0 = A, X_i = 0, i = 1, \ldots, N+1, & \lambda_0 = 1,\ \lambda = 0. \end{cases}$$

4.2 Численные примеры и результаты работы прораммы

Рассмотрим задачу оптимизации с начальными данными:
$A = 10000$;
$P_{-1} = 2$;
$\alpha = 0.001$;
$C_0 = 90000$;
$N = 9$;

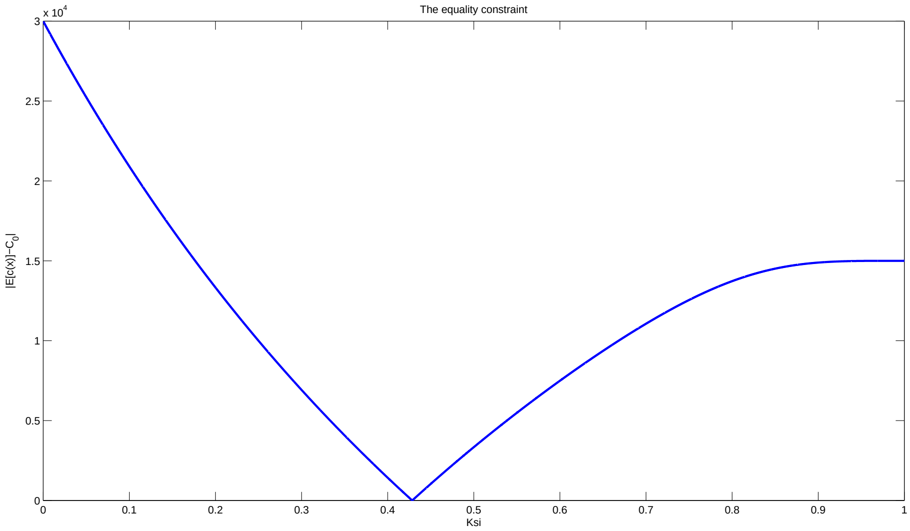


Рис. 1: $|E(c(x)) - C_0|$

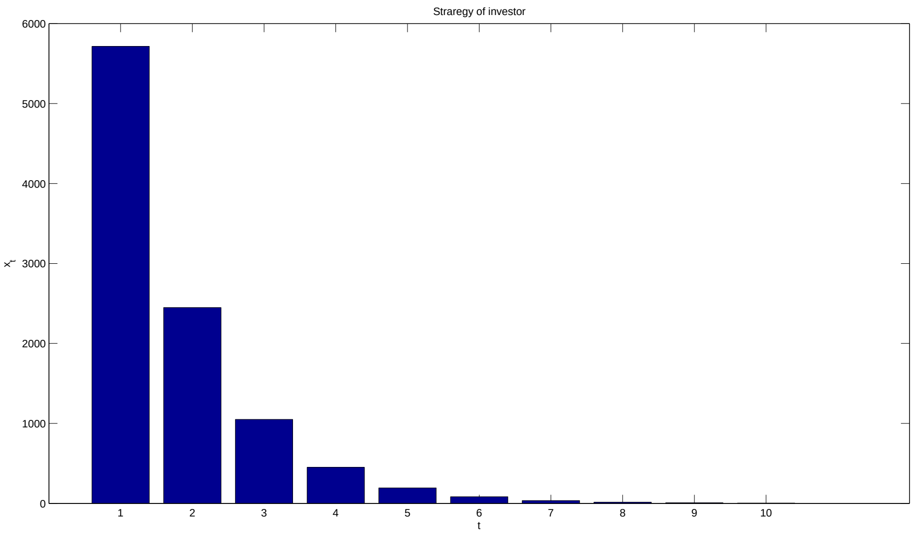
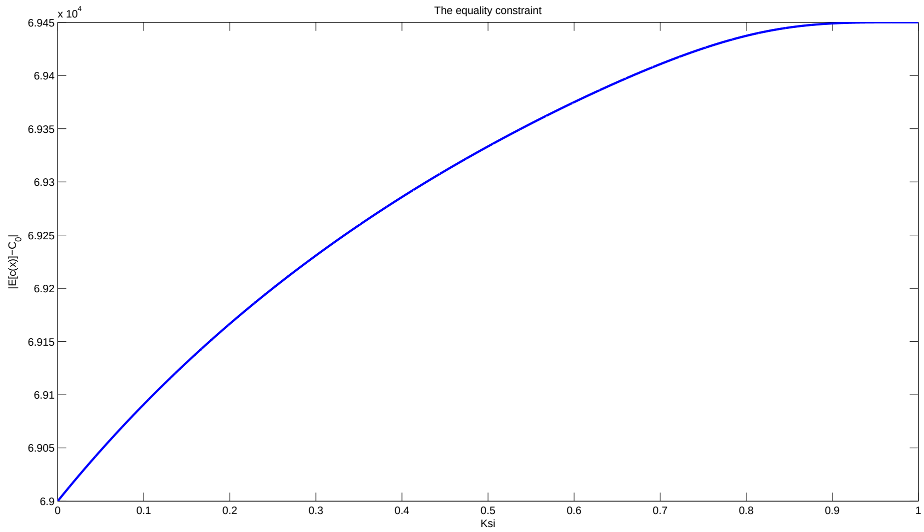


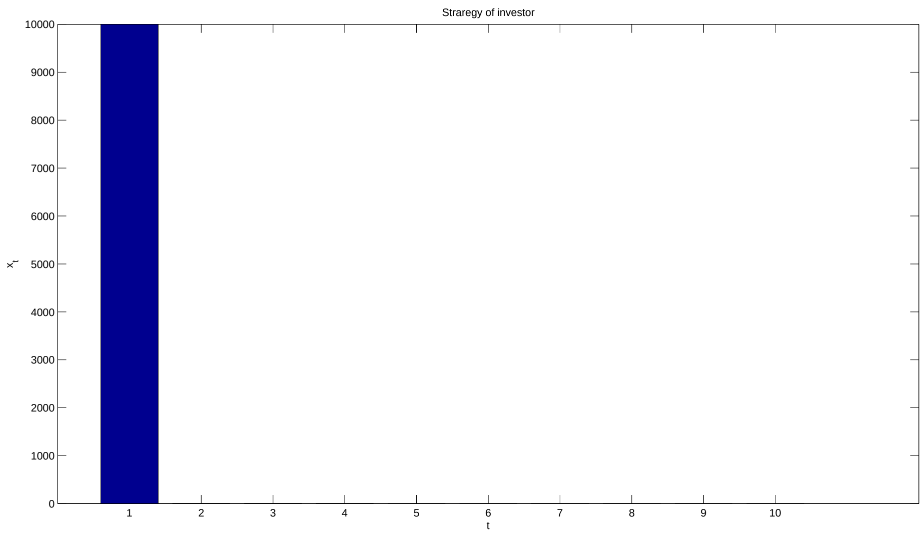
Рис. 2: Оптимальная стратегия

Эта задача соответствует случаю, когда достигается ограничение-равенство, это видно на рис.1. В этом случае $\lambda = 2625$

Рассмотрим другую задачу оптимизации с начальными данными:
$A = 10000;$
$P_{-1} = 2;$

$\alpha = 0.00001;$
$C_0 = 90000;$
$N = 9;$





Эта задача соответствует случаю, когда равенство нигде не достигается. Причем C_0 сильно больше средних затрат.
Если C_0 всегда меньше затрат, решения оптимизационной задачи не существует.

5 Динамика изменения цены с учетом дополнительной информации

В этом расширении модели цена по-преждему линейно зависит от объема покупки. Дополнительно вводится переменная y_t, цена так же линейно зависит от y_t. Наличие этой серийно-коррелирующей переменной в законе динамики цены отражает потенциальное воздействие изменений условий рынка или доступа к конфиденциальной информации о надежности актива. Например, y_t может быть доходностью индекса S&P500, общей составляющей цены на большинство акций.

$$P_i = P_{i-1} + \alpha x_i + \beta y_t + u_i,\ i = 1, \dots, N,\ \alpha > 0,$$

$$y_t = \rho y_{t-1} + z_t,\ \rho \in (-1, 1).$$

β является мерой чувствительности влияния данной особой информации на изменение будущей цены.
u_i, z_i — независимые одинаково распределенные случайные величины.
$\mathbb{E}u_i = 0$, $Var\ u_i = \sigma_u^2 \Delta t$;
$\mathbb{E}z_i = 0$, $Var\ u_i = \sigma_z^2 \Delta t$;

Если $\rho = 0$ это значит, что y_i имеет непрогнозируемые значения, y_i по-прежнему влияет на цену, но оказывает непостоянное влияние.

Если $\rho > 0$ можно без ограничения общности считать $\beta > 0$, это означает, что так как y_i положительная коррелирующая серийная переменная в момент времени t_i покупка должна быть больше при прочих равных.

Если $\rho < 0$ ситуация обратная, стоит подождать, так как ожидается снижение цен.

Будем рассматривать модель с ограничениями $0 < \rho < 1,\ \beta > 0$
Эти предположения являются эмпирически правдоподобными. Так как y_t обычно увеличивается и приводит к увеличению цены.

Выпишем в этом случае функцию затрат:
$c(X) = X_0 P_{-1} + \alpha \sum\limits_{i=0}^{N} X_i (X_i - X_{i+1}) + \sum\limits_{i=1}^{N} X_i u_i + \beta \sum\limits_{i=0}^{N} \left(\sum\limits_{j=0}^{i} \left(\sum\limits_{k=0}^{i-j} \rho^j \right) z_j \right) (X_i - X_{i+1}) + \sum\limits_{i=0}^{N} \left(\sum\limits_{j=0}^{i} \beta y_{-1} \rho^{j+1} \right) (X_i - X_{i+1}).$
Средние затраты:
$\mathbb{E}\left[c(X)\right] = X_0 P_{-1} + \alpha \sum\limits_{i=0}^{N} X_i (X_i - X_{i+1}) + \sum\limits_{i=0}^{N} \left(\sum\limits_{j=0}^{i} \beta y_{-1} \rho^{j+1} \right) (X_i - X_{i+1}),$

Дисперсия затрат:

$Var\left[c(X)\right] = \sigma_u^2 \Delta t \sum\limits_{i=1}^{N} X_i^2 + \sigma_z^2 \Delta t \beta \sum\limits_{i=0}^{N} \left(\sum\limits_{j=0}^{i} \rho^j \right) (X_i - X_{i+1}).$

5.1 Решение задачи

Будем решать аналогичную задачу минимизации дисперсии затрат с ограничением на максимальное значение средних затрат.

Предположим, что $\sigma_u^2 \Delta t = \sigma_z^2 \Delta t = 1$.

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{N} X_i^2 + \sum\limits_{i=0}^{N} \left(\sum\limits_{j=0}^{i} \rho^j \right) (X_i - X_{i+1}) \to \min, \\ \mathbb{E}\left[c(X)\right] = C_0, \\ A = X_0 \geqslant X_1 \geqslant \ldots \geqslant X_N \geqslant X_{N+1} = 0. \end{cases}$$

$$\widetilde{X} = (X_1, \ldots, X_N)$$

$$L(\widetilde{X}, \lambda_0, \lambda_1) = \lambda_0 \left(\sum_{i=1}^{N} X_i^2 + \sum_{i=0}^{N} \left(\sum_{j=0}^{i} \rho^j \right) (X_i - X_{i+1}) \right) +$$

$$\lambda_1 \left(X_0 P_{-1} + \alpha \sum_{i=0}^{N} X_i (X_i - X_{i+1}) + \sum_{i=0}^{N} \left(\sum_{j=0}^{i} \beta y_{-1} \rho^{j+1} \right) (X_i - X_{i+1}) - C_0 \right)$$

Возможны два случая: первый — $\lambda_0 = 0, \lambda_1 > 0$ и второй — $\lambda_0 \neq 0, \lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \geqslant 0$

Рассмотрим первый случай $\lambda_0 = 0, \lambda_1 > 0$.

Необходимое условие минимума:

$$L'_{\widetilde{X}} = 0 :$$

$$\frac{\partial L}{\partial X_i} = \alpha \lambda_1 \left(-X_{i-1} + 2X_i - X_{i+1} \right) + \lambda_1 \beta y_{-1} \rho^{j+1} = 0,$$

$$(-X_{i-1} + 2X_i - X_{i+1}) + \frac{\beta}{\alpha} y_{-1} \rho^{j+1} = 0,$$

Из условия дополняющей нежесткости:

$$(X_0 P_{-1} + \alpha \sum_{i=0}^{N} X_i (X_i - X_{i+1}) + \sum_{i=0}^{N} \left(\sum_{j=0}^{i} \beta y_{-1} \rho^{j+1} \right) (X_i - X_{i+1}) - C_0 = 0$$

и должно выполняться:

$$X_i - X_{i+1} \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, N.$$

Решение однородного уравнения известно:

$$X_t = A - \frac{A}{N+1} t.$$

Найдем частное решение в виде:

$$Y(t) = a\rho^t,$$

$$-a\rho^{t-1} + 2a\rho^t - a\rho^{t+1} + \frac{\beta}{\alpha} y_{-1}\rho^{t+1} = 0,$$

$$a\left(2 - (\rho^{-1} + \rho)\right) = -\frac{\beta}{\alpha} y_{-1}\rho,$$

$$a = \frac{\beta y_{-1}\rho}{\alpha((\rho^{-1} + \rho) - 2)}.$$

$$X_t = A\left(1 - \frac{t}{N+1}\right) + \frac{\beta y_{-1}\rho}{\alpha((\rho^{-1} + \rho) - 2)}\rho^t.$$

Чтобы X_t было решением необходимо также проверить условие:
$X_i - X_{i+1} \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, N.$.

Рассмотрим второй случай: $\lambda_0 \neq 0, \lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_0}$
Здесь возможны ещё 2 ситуации: $\lambda = 0$ и $\lambda \neq 0$.
Рассмотрим сначала случай $\lambda = 0$.
Тогда разностное уравнение примет вид:

$$\frac{\partial L}{\partial X_i} = 2X_i + \beta\rho^i = 0.$$

Решение однородного уравнения:

$$X_0 = A, X_i = 0, i = 1, \ldots, N+1.$$

Частное решение:

$$X_t = -\frac{\beta}{2}\rho^t$$

Осталось рассмотреть ситуацию $\lambda \neq 0$:

$$\frac{\partial L}{\partial X_i} = 2X_i + \alpha\lambda(-X_{i-1} + 2X_i - X_{i+1}) + \lambda\beta y_1\rho^{i+1} + \beta\rho^i =$$

$$2(1 + \lambda\alpha)X_i - \alpha\lambda(X_{i-1} + X_{i+1}) + \beta\rho^i(1 + \lambda y_{-1}\rho) = 0$$

Решение однородного уравнения:

$$X_t = A\left(\frac{-\xi_2^{2(N+1)}\xi_2^{-t} + \xi_2^t}{1 - \xi_2^{2(N+1)}}\right).$$

Частное решение ищем в виде:

$$Y(t) = a\rho^t,$$

$$2a\rho^t(1 + \lambda\alpha) = \lambda\alpha a(\rho^{i-1} + \rho^{i+1}) - \beta\rho^i(1 + \lambda y_{-1}\rho)$$

$$a = -\frac{\beta(1 + \lambda y_{-1}\rho)}{2(1 + \lambda\alpha) - \lambda\alpha(\rho^{-1} + \rho)}$$

Окончательный вид X_t:

$$X_t = A\frac{-\xi_2^{2(N+1)}\xi_2^{-t} + \xi_2^t}{1 - \xi_2^{2(N+1)}} - \frac{\beta(1 + \lambda y_{-1}\rho)}{2(1 + \lambda\alpha) - \lambda\alpha(\rho^{-1} + \rho)}\rho^t$$

Для того, чтобы X_t являлось решением, должно выполняться условие:

$$X_i - X_{i+1} \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, N.$$

5.2 Дальнейшее исследование модели

Была рассмотрена модель динамики изменения цены с учетом дополнетельной информации. Было получено решение поставленной оптимизационной задачи. В дальнейшем планируется рассмотеть численные примеры для исследования монотонности найденных, вообще говоря, стационарных точек.

6 Список литературы

[1] *Bertsimas D., Lo A. W.* Optimal control of execution costs. — Journal of Financial Markets— №1—1998—pp. 1-50.

[2] *Андреев Н. А.* Современные математические модели влияния на цену: приложение к задаче оптимальноо управления портфелем на рынке, движимом заявками. — Сборник статей молодых ученых факультета ВМК МГУ. Выпуск 9. 2012

[3] *Морозов В. В., Толли Н. И.* Минимизация риска при крупных закупках на финансовом рынке. — International Journal of Open Information Technologies ISSN: 2307-8162 vol.2, no. 8, 2014

[4] *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и её приложения. В 2-х томах. Т.1. — М.: Мир, 1984.